Beweis: Erwartungswert bei Earthdawn

André Prager

5.Juli 2006

Beweis erfolgt für den allgemeinen Fall eines n-seitigen Würfels:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \left((n-1)\, n\, (k-1) + \sum_{i=1}^{n-1} i \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \left((n-1)\, n\, (k-1) + \frac{n\,(n-1)}{2} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^{k-1}} \frac{2k-1}{2} \\
&= \frac{n-1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{n^k} \\
&= (n-1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n^k} + \frac{n-1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&= (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{n^j} + \frac{n-1}{2} \frac{n}{n-1} \\
&= (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \frac{1-\frac{1}{n}^{k}}{1-\frac{1}{n}} \right) + \frac{n}{2} \\
&= \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(n - n + \frac{1}{n^{k-1}} \right) \\
&= \frac{n}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \\
&= \frac{n}{2} + \frac{n}{n-1} \quad \square
\end{aligned}
$$

Somit ergeben sich folgende Erwartungswerte für die Würfel:

- $E[1W4] = 3 + \frac{1}{3}$

- $E[1W6] = 4 + \frac{1}{5}$
- $E[1W8] = 5 + \frac{1}{7}$
- $E[1W10] = 6 + \frac{1}{9}$
- $E[1W12] = 7 + \frac{1}{11}$
- $E[1W20] = 11 + \frac{1}{19}$

Aufgrund der stochastischen unabh. kann man die Erwartungswerte einfach addieren, wenn man mehrere Würfel würfelt.